

# 多涡卷 Jerk 混沌吸引子及其实现

李 亚 戴青云 卞丽雅 刘 庆 曹江中

(广东工业大学信息工程学院, 广州 510090)

**摘 要** 以多涡卷 Jerk 系统为例,介绍了利用 DSP 处理器实现连续混沌系统的方法。同时设计了相应的模拟硬件电路,并分别给出了硬件实验结果。实验结果表明,利用 DSP 产生的实验结果与模拟电路产生的结果完全一致,证实了该方法的可行性。该方法同样可以实现其他连续混沌系统,具有普适性。该方法还存在着调试方便,参数调节灵活,计算误差可控性强,频谱调节范围较宽且方便等优点,便于实现数字保密通信。

**关键词** Jerk 系统 硬件实现 多涡卷 连续混沌系统

中图法分类号: TN911.72 TN702 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)03-0440-05

## Multi-scroll Jerk Chaotic Attractors and its Implemented

LI Ya, DAI Qing-yun, BIAN Li-ya, LIU Qin, CAO Jiang-zhong

(College of Information Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006)

**Abstract** An effective approach for generating continual-chaotic system by using the Digital Signal Processor (DSP) is presented in this paper. Taking the Jerk system as an example, we introduced how to implement using the DSP device, and designed analog hardware circuit. Then, the experimental results of analog and digital are given respectively at the same time. The two results are in good agreement. This confirms the feasibility of our method. A number of experiments show that this method can also be applied to other continual systems. It is convenient, flexible and easy to use in digital secure communication.

**Keywords** Jerk system, hardware experiment, multi-scroll, continual chaotic system

## 1 引 言

在过去 40 多年里,混沌已经在数学、通信等科学和工程领域得到了深入的研究<sup>[1]</sup>。近 20 年来,国内外在这一领域的研究已经取得了许多相关的成果,并提出了能产生混沌与超混沌吸引子的多种方法<sup>[2-4]</sup>。更为重要的是,人们还进一步研究了多涡卷甚至多维多涡卷混沌吸引子的产生问题,提出了分段线性函数、阶梯波、正弦函数、时滞函数、三角波函数、锯齿波函数等各种方法来产生多涡卷混沌吸引子<sup>[2-6]</sup>。在此基础上,人们在硬件电路实现上也提出了不同类型的混沌振荡器的设计方法,取得了许多新的进展。例如文献[4]报道了利用三角波和锯齿波函数从 Jerk 系统中获得了 3~12 个可以灵

活调节涡卷大小、形状的实验结果。此外,文献[5]还报道了从模拟硬件电路中获取 3 维  $10 \times 10 \times 10$  个涡卷的实验结果。

然而,混沌技术的应用与发展并非如人们所想的那样一帆风顺。早在 1990 年 Pecora & Carroll<sup>[7]</sup>就指出混沌可以同步,但从目前已有的文献报道来看,国内外有关混沌通信的研究大多局限于计算机仿真和电路仿真,而比较缺少对模拟硬件实验的详细报道<sup>[8]</sup>。这主要是由于模拟器件的参数离散性等导致的混沌模拟通信系统的鲁棒性差,制约了混沌通信技术的发展。那么能否利用数字器件来产生模拟混沌吸引子呢?文献[9]和[10]给了肯定的答复。文献[9]报道了利用 FPGA (field-programmable gate array) 从蔡氏系统中获得了 3~4 个涡卷的实验结果。文献[10]也报道了从离散化的蔡氏系统中获

收稿日期:2006-06-26;改回日期:2006-08-15

第一作者简介:李亚(1979~),男,2007年于广东工业大学获信号与信息处理专业工学硕士学位。感兴趣研究领域为混沌与保密通信、图像处理、模式识别。E-mail: liya2829@163.com

得了 8 涡卷混沌吸引子的实验。

有鉴于此,本文以 6 涡卷 Jerk 系统为例,介绍了利用 DSP (digital signal processor) 处理器实现连续混沌系统的方法。同时给出了利用模拟电路产生 6 涡卷混沌吸引子的硬件电路,并分别给出了相应的实验结果。实验结果表明,利用 DSP 产生的实验结果与模拟电路产生的结果完全一致,证实了该方法的可行性。必须指出的是,该方法同样适应于其他模拟混沌系统,具有普适性。

## 2 多涡卷 Jerk 系统

考察如下 Jerk 系统:

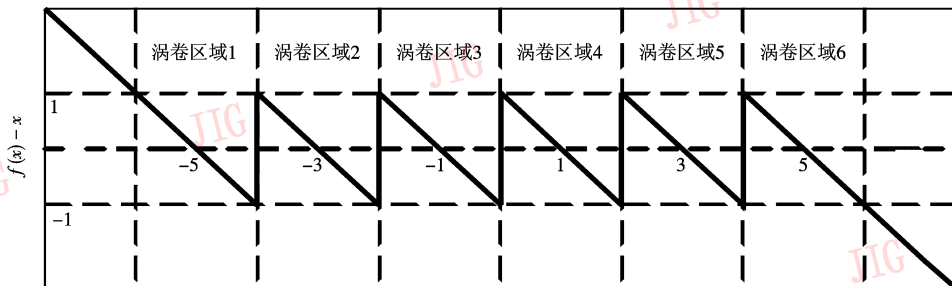


图1  $f(x) - x$  的波形及 6 个涡卷区域

Fig. 1 Construction of  $f(x) - x$

式(2)在平衡点处的 Jacobi 矩阵可表示为

$$J(p_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x} & -1 & -a \end{bmatrix}_{x=x_i} \quad (i = \pm 1, \pm 3, \pm 5) \quad (3)$$

将各平衡点代入式(3),分别解出平衡点处的特征值。对于系统式(2),由于其在各平衡点处的斜率处处相等,所以各平衡点处对应的 Jacobi 矩阵的特征值也相等。故只需计算其中的一个平衡点处的 Jacobi 矩阵的特征值就可以了。以  $i = 1$  为例,将平衡点  $p_1 = (1, 0, 0)$  代入式(3),求得其特征值为  $\lambda_1 = -1.0347, \lambda_{2,3} = 0.2173 \pm i1.1843$ 。由于  $\text{Re}(\lambda_{2,3}) > 0, \lambda_1 < 0$ ,故该平衡点是一个指标为 2 的鞍点。该结论符合文献[4]中的定理 1,即普通 Jerk 系统存在混沌的条件。显然,系统式(2)存在 6 个指标为 2 的鞍点,因此该系统可以产生 6 个涡卷混沌吸引子。在上述基础上,进一步分析系统式(2)产生混沌吸引子的机理。以其中任意一个平衡点为例,其平衡点所对应的 3 个特征值为  $\lambda_1 = -1.0347, \lambda_{2,3} =$

$$\ddot{x} + (1 + a)\dot{x} + \gamma x = f(x) \quad (1)$$

式中,  $\gamma = 1, a = 0.6$ 。令  $y = \dot{x}, z = \ddot{x}$  改写式(1)为

$$\begin{cases} dx/dt = y \\ dy/dt = z \\ dz/dt = -x - y - az + f(x) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $f(x) = \text{sgn}(x) + \text{sgn}(x + 2) + \text{sgn}(x - 2) + \text{sgn}(x + 4) + \text{sgn}(x - 4)$ 。 $f(x)$  的构造方法可参见文献[4]。根据平衡点的概念,令式(2)的左边为 0,并解方程组,得到式(2)关于变量  $x$  的 6 个平衡点(剔除不连续的点)为  $p_i = (x_i, 0, 0)$ ,其中,  $x_i = (\pm 1, \pm 3, \pm 5)$ , 5 个转折点为  $e_i = 0, \pm 2, \pm 4$ ,其中,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 。 $f(x)$  在平衡点  $p_i$  处的斜率为  $-1$  且处处相等。5 个转折点将  $f(x)$  分成如图 1 所示的 6 个区域。

$0.2173 \pm i1.1843$ , 它满足  $|\text{Re}(\lambda_{2,3})| < |\lambda_1|$ ,  $(\text{Re}(\lambda_{2,3}))\lambda_1 < 0$ 。由于  $\text{Re}(\lambda_{2,3}) > 0, \lambda_1 < 0$ ,根据 Shil'nikov 定理混沌相轨迹在平衡点处形成一个向外扩展的涡卷运动<sup>[11]</sup>。

## 3 模拟硬件电路设计

对式(2)两边同时积分得:

$$\begin{cases} x = \int y d\tau \\ y = \int z d\tau \\ z = \int (-x - y - az + f(x)) d\tau \end{cases} \quad (4)$$

根据式(4),按照文献[12]所提出的设计方法,可得基于模块化设计的硬件电路图如图 2 所示。

图 2 中的运算放大器型号为 TL082,所有有源器件的电源电压均为  $\pm 15V$ ,所有电阻均采用精密可调电阻或精密可调电位器。图中的虚线框为锯齿波产生电路。

根据图 2,可得电路的状态方程为

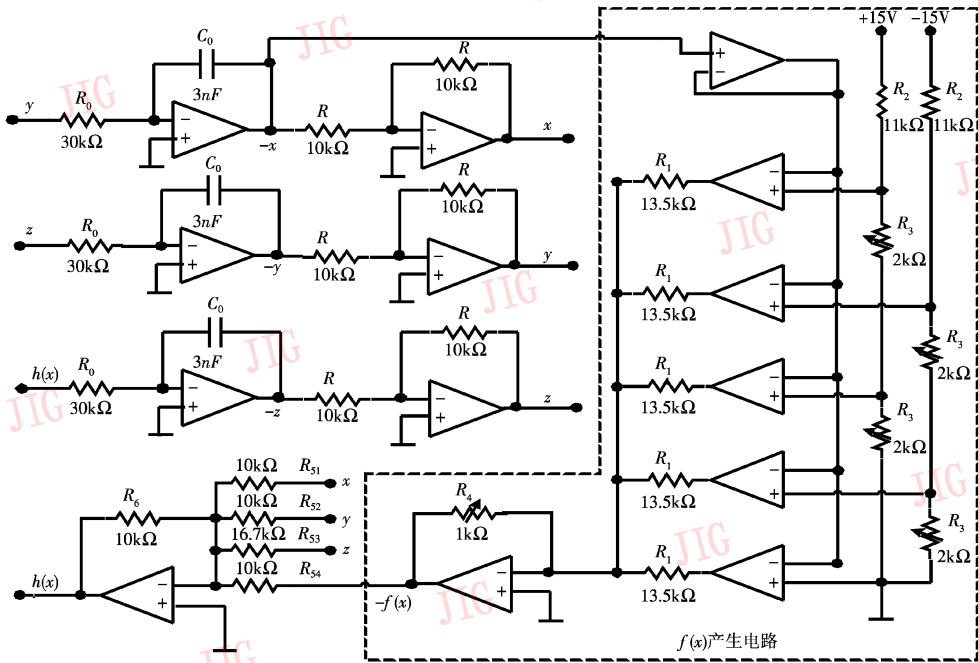


图 2 用符号函数产生 6 涡卷的 Jerk 电路图  
Fig. 2 Circuit diagram of realizing 6-scrolls Jerk

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{R}{R_0}(-x) = -\frac{R}{R_0 C_0} \int y dt \\ \dot{y} = -\frac{R}{R_0}(-y) = -\frac{R}{R_0 C_0} \int z dt \\ \dot{z} = -\frac{R}{R_0} \left( \frac{-1}{R_0 C_0} \int h(x) dt \right) \\ = -\frac{1}{R_0 C_0} \int \left( \frac{R_6}{R_{51}} x + \frac{R_6}{R_{52}} y + \frac{R_6}{R_{53}} z - \frac{R_6}{R_{54}} f(x) \right) dt \end{cases} \quad (5)$$

进一步对式(5)进行时间尺度变换,令  $\tau = t/(R_0 C_0)$ ,其中,  $1/R_0 C_0$  为时间尺度变换因子,同时也是图 2 中积分器的积分常数。可通过改变  $R_0$  或  $C_0$  的大小来改变混沌信号的频谱分布范围。经整理得无量纲状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \int y d\tau \\ \dot{y} = \int z d\tau \\ \dot{z} = \int \left( -\frac{R_6}{R_{51}} x - \frac{R_6}{R_{52}} y - \frac{R_6}{R_{53}} z + \frac{R_6}{R_{54}} f(x) \right) d\tau \end{cases} \quad (6)$$

比较式(2)和式(6),得系统参数与电路参数之间的对应关系分别为  $R_6/R_{51} = R_6/R_{52} = R_6/R_{54} = 1$ ;  $R_6/R_{53} = 0.6$  取  $R_6 = 10k\Omega$ , 则  $R_{51} = R_{52} = R_{54} = 10k\Omega, R_{53} = 16.7k\Omega$ 。由于 TL082 采用 15V 供电时,饱和电压为 13.5V,故为获得  $f(x), R_1 = 13.5k\Omega,$

$R_4 = 1k\Omega$ 。 $R_2$  和  $R_3$  的取值只要满足产生 2V 和 4V 的电压就可以了,这里  $R_2 = 11k\Omega, R_3 = 2k\Omega$ 。硬件实验结果如图 3、图 4 所示。该结果是用数码相机从模拟示波器上拍到的混沌吸引子相图。

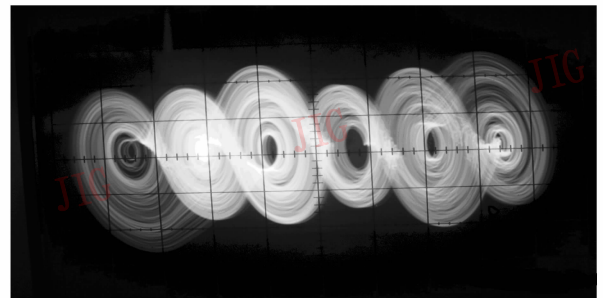


图 3 混沌吸引子在 x-y 平面上的相图  
Fig. 3 Phase portraits in x-y planes

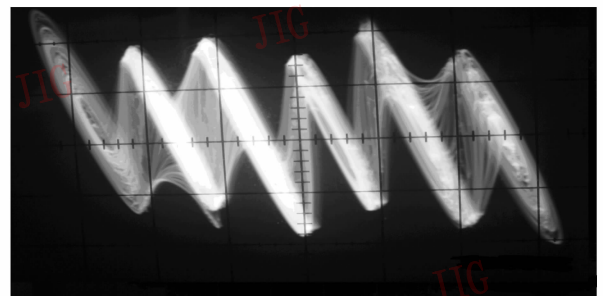


图 4 混沌吸引子在 x-z 平面上的相图  
Fig. 4 Phase portraits in x-z planes

## 4 DSP 实现

### 4.1 微分方程的离散化

要使连续系统能通过数字器件来实现,离散化是至关重要的一步。将微分方程离散化,通常有以下3种方法<sup>[13]</sup>。(1)差商逼近法,即用适当差商逼近导数值;(2)数值积分法,其基本思想是将初值问题转化为积分方程,然后将其数值积分离散化,从而获得一个离散差分格式;(3) Taylor 展开法,其基本思想是首先构造一个关于真解及其有关信息的含参量算子,将算子中诸项在某点处按 Taylor 展式展开,合并该展式中的同类项并截去余项,然后令诸同类项系数为零,由此即可确定出原算子中的全部(或部分)参数,从而获得一个(或一类)关于数值解的差分方程。在这里采用第1种方法。事实上,微分方程和差分方程在形式上有相似之处。考察下式:

$$\begin{cases} dy(t)/dt = Ay(t) + x(t) \\ y(n+1) = ay(n) + x(n) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \approx \frac{X(nT) - X((n-1)T)}{T} = Y(n-1) \\ \frac{dy}{dt} \approx \frac{Y(nT) - Y((n-1)T)}{T} = Z(n-1) \\ \frac{dz}{dt} \approx \frac{Z(nT) - Z((n-1)T)}{T} = -X(n-1) - Y(n-1) - aZ(n-1) + F \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $F=f(X(n-1))$ 。对式(8)两边同时乘以  $T$ ,  $T>0$ , 并令  $m=nT$  整理得:

$$\begin{cases} X(m) = TY(m-1) + X(m-1) \\ Y(m) = TZ(m-1) + Y(m-1) \\ Z(m) = T(-X(m-1) - Y(m-1) - aZ(m-1) + F) + Z(m-1) \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $F = \text{sgn}(X(m-1)) + \text{sgn}(X(m-1) + 2) + \text{sgn}(X(m-1) - 2) + \text{sgn}(X(m-1) + 4) + \text{sgn}(X(m-1) - 4)$ 。

对于式(9)的差分方程,将其作为程序的循环体,无限的迭代,便可得到一组混沌序列。为了能够实时地从示波器上看到混沌序列的相图,需要将混沌序列进行 D/A 转换。在 D/A 转换时,一定要选取双极性的 D/A 器件。图 5 是利用 TI 公司的 TMS320F2812 作为主处理器, DAC7724 作为数模转换器所获得的实验结果。TMS320F2812 为 32 位定点 DSP, 主频为 150MHz, 详细的资料请参看该芯片的数据资料。DAC7724 为 4 通道、12 位分辨率、

对比式(7)两个方程可以看到,若  $y(n)$  与  $y(t)$  相当,则离散变量序号加 1 所得之序列  $y(n+1)$  就与连续函数对变量  $t$  取一阶导数  $dy(t)/dt$  相对应,  $x(n)$  与  $x(t)$  分别表示各自的激励信号。它们不仅在形式上相似,而且在一定的条件下可以互相转化<sup>[14]</sup>。对于连续时间函数  $y(t)$ , 若在  $t=nT$  各点取得样值  $y(nT)$ , 并假设时间间隔  $T$  足够小, 于是  $y(t)$  微分式可以近似表示为  $\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y[(n+1)T] - y(nT)}{T}$ , 因此式(7)第 1 个微分方程就可以写作  $\frac{y(n+1) - y(n)}{T} \approx Ay(n) + x(n)$ , 经整理后得  $y(n+1) \approx (1+AT)y(n) + Tx(n)$ 。必须注意,微分方程近似写作差分方程的条件是样值间隔  $T$  要合适。实际上,利用数字计算机来求解微分方程时(如欧拉法、龙格-库塔法),就是根据这一原理完成的。

### 4.2 DSP 实现

按照上述方法,对系统式(2)进行离散化,采样时间间隔为  $T$ , 在这里采用后向差分的形式。

$\pm 10V$  信号量程、建立时间为  $2\mu s$ 、 $\pm 15V$  供电的 D/A 转换器。必须指出的是,数模转换器要求输入数据必须是整型数据,而 DSP 计算出来的数据是浮点型的,因此在 D/A 转换前必须将浮点型数据整型化。整型化过程中还起到了信号幅度的压缩作用,便于 D/A 转换。为了表明该方法不是一个特例,利用同样的方法对蔡氏电路进行了实验,实验结果如

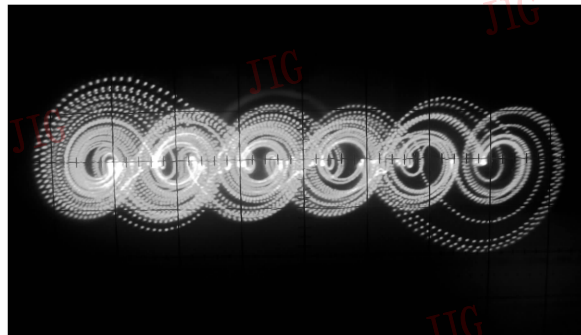


图 5 6 涡卷 Jerk 系统在  $x-y$  平面上的相图  
Fig. 5 Phase portraits in  $x-y$  planes of Jerk

图 6 所示。

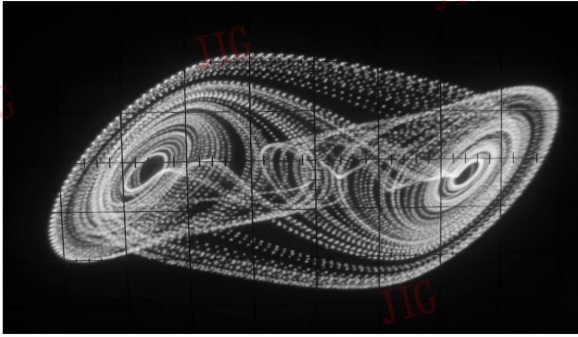


图 6 蔡氏系统在  $x-y$  平面上的相图

Fig. 6 Phase portraits in  $x-y$  planes of chua's circuit

## 5 结 论

以 Jerk 系统为例,介绍了利用 DSP 处理器实现连续混沌系统的方法。同时设计了 6 涡卷混沌吸引子系统的模拟硬件电路,并给出了相应的硬件实验结果。实验结果表明,利用 DSP 产生的实验结果与模拟电路产生的结果完全一致,证实了该方法的可行性。最后,给出了蔡氏电路的 DSP 实验结果,进一步证实了该方法的可行性和普适性。利用 DSP 处理器产生混沌信号主要存在着调试方便,参数调节灵活,计算误差可控性强,频谱调节范围较宽且方便等优点。正是这些优点,可以使得在通信的收发两端参数完全匹配,便于混沌在数字保密通信中的应用。但是,关于利用 DSP 产生模拟混沌信号还存在着一些问题,如采样间隔的选取原则,离散化后的混沌系统是否会退化周期信号等还需要进一步的研究。

### 参考文献 (References)

- 1 Chen Guan-rong, Yu Xing-huo. Chaos Control Theory and Applications[M]. Berlin: Germany Spring-Verlag, 2003.
- 2 Matsumoto T, Chua L O, Komuro M. The double scroll[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 1985, **32**(8): 798 ~ 817.
- 3 Yu Si-min. Circuit implementation for generating three-dimensional

multi-scroll chaotic attractors via triangular wave series [J]. Acta Physica Sinica, 2005, **54**(4): 1500 ~ 1509. [禹思敏. 用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的电路实验[J]. 物理学报, 2005, **54**(4): 1500 ~ 1509.]

- 4 Yu Si-min, Lü Jin-hu, Chen Guan-rong, et al. Design and implementation of  $n$ -scroll chaotic attractors from a general Jerk circuit[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 2005, **52**(7): 1459 ~ 1476.
- 5 Lü Jin-hu, Chen Guan-rong. Multi-scroll chaos generation: Theories, methods and applications[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2006, **16**(4): 775 ~ 858.
- 6 Lü Jin-hu, Yu Si-min, Chen Guan-rong, et al. Experimental verification of multi-directional multi-scroll chaotic attractors[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 2006, **53**(1): 149 ~ 165.
- 7 Louis M Pecora, Thomas L Carroll. Synchronization in chaotic system [J]. Physics Review Letter, 1990, **64**(8): 821 ~ 824.
- 8 Yu Si-min, Qiu Shui-sheng. The research and hardware implementation of a scheme for chaotic secure communications of speech and music signals transmission[J]. Journal of China Institute of Communications, 2002, **23**: 105 ~ 113. [禹思敏, 丘水生. 一种语音混沌保密通信方案的研究与硬件实现[J]. 通信学报, 2002, **23**(8): 105 ~ 113.]
- 9 Kei Eguchi, Takahiro Inoue, Akio Tsuneda. Synthesis and analysis of a digital chaos circuit generating multiple-scroll strange attractors[J]. IEICE Transactions Fundamentals, 1999, **E82-A**(6): 965 ~ 972.
- 10 Tang Kit-sang, Man Kim-fung, Chen Guang-rong. Digitized  $n$ -scroll attractors model for secure communications [A]. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'01) [C], Sydney, Australia, 2001, **3**: 787 ~ 790.
- 11 Silva C. Shil'nikov's theorem—A tutorial[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 1993, **40**(10): 675.
- 12 Li Ya, Yu Si-min, Dai Qin-yun, et al. A novel approach for Chua's circuit design and its hardware implementation[J]. Acta Physica Sinica, 2006, **55**(8): 3938 ~ 3945. [李亚, 禹思敏, 戴青云等. 一种新的蔡氏电路设计方法与硬件实现[J]. 物理学报, 2006, **55**(8): 3938 ~ 3945.]
- 13 Li Hong. Numerical Analysis[M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press, 2003 [李红著. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003.]
- 14 Zhen Jun-li, Ying Qi-heng, Yang Wei-li, Signal and System[M]. Beijing: High Education Press, 2000. [郑君里, 应启珩, 杨为理著. 信号与系统[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.]